Corrigé type de l'examen de Mathématiques et Statistique
Promotion : $1^{ère}$ année socle cummun - section 2

Exercice 1 (06 pts)

1 Les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 3 des fonctions données :

a) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ **1pt**

b) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ **1pt**

c) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon_3(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$ **1pt**

2 Le calcul des limites :

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_2(x)\right)}{x-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_1(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(-1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2-x^2\varepsilon_2(x)\right)}{x\left(1-\frac{1}{6}x^2+x^2\varepsilon_1(x)\right)} = -1$$ **1pt**

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_2(x)-x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x+x\varepsilon_2(x)\right)}{x^2} = \frac{1}{2}$$ **1pt**

c) On a: $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + x^6\varepsilon_4(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{6}x^6+x^6\varepsilon_4(x)-1+\frac{1}{2}x^2-x^3\varepsilon_3(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4+x\varepsilon_5(x)\right)}{x^2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_5(x) = x^3\varepsilon_4(x) - \varepsilon_3(x)$. **1pt**

Exercice 2 (06 pts)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-2	0	3	4
$P(X=x_i)$	$0,1$	$0,3$	α	$0,2$

1 La valeur du réel α: $\sum\limits_{i=1}^{4} P(X=x_i) = 1 \Leftrightarrow 0,1+0,3+\alpha+0,2 = 1 \Leftrightarrow 0,6+\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0,4$ **1pt**

2 Le calcul de $P(X \leq 3)$ et $P(X > -2)$:

$P(X \leq 3) = P(X=-2) + P(X=0) + P(X=3) = 0,8$ **1pt**
$P(X > -2) = P(X=0) + P(X=3) + P(X=4) = 0,9$ **1pt**

3 Le calcul de $E(X)$ et $\sigma(X)$:

$E(X) = \sum\limits_{i=1}^{4} x_i P(X=x_i) = -2\times 0,1 + 0\times 0,3 + 3\times 0,4 + 4\times 0,2 = 1,8$ **1pt**

$$V(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(X = x_i) - (E(X))^2 = (-2)^2 \times 0,1 + (3)^2 \times 0,4 + (4)^2 \times 0,2 - (1,8)^2 = 3,96$$ **1pt**

Alors, $\sigma(X) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{3,96} = 1,9$ **0,5pt**

4 Déterminons $F_X(x)$, la fonction de répartition de la variable aléatoire X :

- Si $x < -2$, alors $F_X(x) = 0$.
- Si $-2 \leqslant x < 0$, alors $F_X(x) = P(X = -2) = 0,1$.
- Si $0 \leqslant x < 3$, alors $F_X(x) = P(X = -2) + P(X = 0) = 0,1 + 0,3 = 0,4$.
- Si $3 \leqslant x < 4$, alors $F_X(x) = P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 3) = 0,1 + 0,3 + 0,4 = 0,8$.
- Si $x \geqslant 4$, alors $F_X(x) = 1$.

Ce que l'on peut résumer par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < -2 \\ 0,1 & \text{si} & -2 \leqslant x < 0 \\ 0,4 & \text{si} & 0 \leqslant x < 3 \\ 0,8 & \text{si} & 3 \leqslant x < 4 \\ 1 & \text{si} & x \geqslant 4 \end{cases}$$

0,5pt

Exercice 3 (08 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.

1 Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = 1 - x + e^x$.

a Calculons les limites de g aux bornes de son ensemble de définition:

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}) = +\infty$ **1pt**

b Étudions le sens de variation de g :

- $\forall x \in \mathbb{R} : g'(x) = e^x - 1$ **0,5pt**
- $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ **0,5pt**
- $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ **0,5pt**
- Le tableau de variation de g : **0,5pt**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

c Le signe de $g(x)$: $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) > 0$ **1pt**

2 Déterminons les limites de la fonction f : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **1pt**

3 La fonction dérivée de f : on a $f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x + e^x)e^{-x} = g(x)e^{-x}$ **1pt**

4 Le tableau de variation de f : la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'ou **1pt**

hammou.benmehidi@univ-tiaret.dz

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$\boxed{5}$ Calculons $\int f(x)dx$: on a **1pt**

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \left(x+1+xe^{-x}\right)dx\\ &= \int x dx + \int dx + \int xe^{-x}dx\\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \underbrace{\int xe^{-x}dx}_{I}\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale I par parties : on a $I = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} + c\ /\ c \in \mathbb{R}$.

Alors, $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x^2 + x - (x+1)e^{-x} + c\ /\ c \in \mathbb{R}$.

Une séance de consultation des copies est programmée le 30/01/2024, Amphi C1 à 11h.